Кинематика материальной точки.

Оглавление:

Кинематика материальной точки

В кинематике рассматривается механическое движение
без выяснения причин, его вызывающих.

Механическое движение – изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

При изучения механического движения реальных объектов в физике используются физические модели, такие как материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело, сплошная среда.

Материальная точка – тело, размерами и формой которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Тело можно рассматривать как материальную точку, если его размеры малы по сравнению с расстоянием, которое оно проходит, или по сравнению с расстояниями от него до других тел.

Траектория – линия, вдоль которой материальная точка движется в пространстве в выбранной системе отсчета.

По форме траектории движение можно разделить на *прямолинейное и криволинейное*.

Для характеристики положения материальной точки используют *радиус-вектор*.

Расстояние **ΔS**, отсчитанное по траектории называется длиной пути **◡AB=ΔS**. Вектор, соединяющий начальную и конечную точки траектории называется ***перемещением***

Движение тела, при котором все его точки в данный момент времени движутся одинаково, называется ***поступательным движением.*** Для описания поступательного движения достаточно выбрать одну точку и описать ее движение.

Движение, при котором траектории всех точек тела являются окружностями с центрами на одной прямой и все плоскости окружностей перпендикулярны этой прямой, называется ***вращательным движением.***

Абсолютно твердое тело – тело, размеры и форма которого не меняются в процессе движения.

Чтобы описать механическое движение тела, нужно знать его координаты в любой момент времени. Для определения координат материальной точки следует выбрать тело отсчета и связать с ним систему координат. Система координат, тело отсчета, с которым она связана, и указание начала отсчета времени образуют ***систему отсчета***, относительно которой рассматривается движение тела.

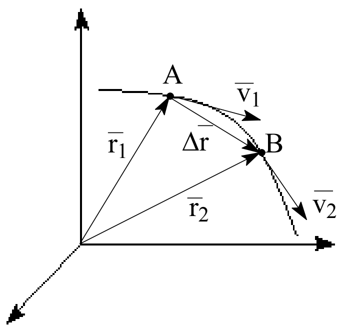
Для описания многих движений систему отсчета связывают с Землей, считая ее неподвижной. В ряде случаев в качестве тела отсчета выбирают Солнце или отдаленные звезды.

Траектория движения тела, пройденный путь и перемещение зависят от выбора системы отсчета. Другими словами, механическое движение относительно.

Основными кинематическими характеристиками движения материальной точки являются *скорость и ускорение*.

Скорость материальной точки.

Оглавление



Пусть при движении по криволинейной траектории материальная точка в некоторый момент времени **t_1** занимала положение **A** с радиус-вектором $\vec{\mathbf{r}}_1$, а в момент времени **t_2=t_1+Δt** – положение **B** с радиус-вектором $\vec{\mathbf{r}}_2$. За время **Δt=t_2-t_1** радиус-вектор получил приращение $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 + \vec{\mathbf{r}}_1$.

Средней векторной скоростью материальной точки называют отношение приращения радиус-вектора точки к тому промежутку времени, за которые это приращение произошло:

$$\langle \vec{\mathbf{v}} \rangle = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta \mathbf{t}} \qquad (1)$$

Средняя путевая скорость:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta \mathbf{t}}$$

Последнее соотношение позволяет установить единицу скорости. В Международной системе (СИ) единицей расстояния является метр, единицей времени – секунда, поэтому скорость выражается в метрах в секунду:

$$\frac{1\text{м}}{1\text{с}} = 1\text{м}/\text{с}$$

Если $\Delta t \to 0$, то отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$ стремится к некоторому пределу, называемому скоростью материальной точки в момент времени **t** или мгновенной скоростью $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (2)$$

Мгновенной скоростью точки называют вектор, численно равный первой производной по времени от радиус-вектора, определяющего положение этой точки в данный момент времени. Вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории в этой точке, т.е.:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau} \qquad (3)$$

$\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к траектории в данной точке;
v – модуль скорости, равный:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,.$$

Движение с постоянной по модулю и направлению скоростью называется ***прямолинейным равномерным движением***.

При прямолинейном движении (по модулю):

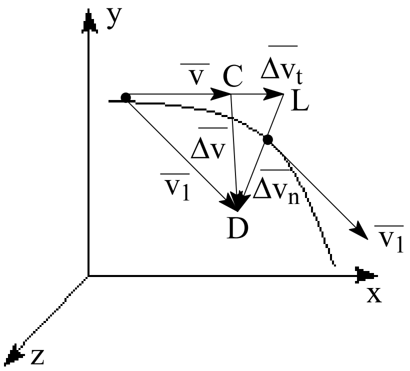
$$v = \frac{dS}{dt}$$

В реальных условиях движение любого тела никогда не бывает строго равномерным и прямолинейным. Движение, при котором тело за равные промежутки времени совершает неодинаковые перемещения, называют ***неравномерным движением.***

Ускорение материальной точки.

Оглавление

Ускорение $\vec{a}$ характеризует быстроту изменения скорости и по направлению и по величине.



Обозначим скорость точки в данный момент времени **t** через $\vec{v}$, а в момент времени **t+Δt** – через $\vec{v}_1$. За промежуток времени Δt произошло приращение скорости $\Delta\vec{v}$: $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$.

Перенесем $\vec{v}_1$ параллельно самому себе в точку **A** и простроим вектор $\Delta\vec{v}$.

Средним ускорением точки называют вектор, равный отношению приращения скорости к тому промежутку времени, за который это приращение произошло:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (4)$$

Вектор

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{a}\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (5)$$

- называется ***мгновенным ускорением точки*** или ***ускорением в данный момент времени***.

Без учета направления:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Тангенциальное и нормальное ускорение.

Оглавление

При криволинейном движении происходит изменение скорости, как по величине, так и по направлению. Принимая во внимание, что $\vec{V} = V\cdot\vec{\tau}$, представим $\vec{a}$ в виде суммы двух векторов:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\cdot\vec{\tau}) + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad (6)$$

Первое слагаемое характеризует изменение скорости по величине и называется ***тангенциальным ускорением:***

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} \qquad (7)$$

Численное значение тангенциального ускорения равно $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, а направление совпадает с направлением касательной к траектории движения.

Второе слагаемое характеризует изменение скорости по направлению и называется ***нормальным ускорением***:

$$\vec{a} = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad (8)$$

Численное значение нормального ускорения равно:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \qquad (9)$$

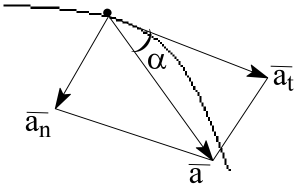
R – радиус кривизны траектории в точке, где определяется ускорение. Направление совпадает с нормалью $\vec{n}$ к траектории.

Разложение ускорения на тангенциальное и нормальное поясним рисунком. Представим вектор $\Delta\vec{v}$ в виде суммы двух векторов, для чего вдоль направления $\vec{v}$ отложим длину **AL** вектора $\Delta\vec{v}_1$ и соединим точки **D** и **L**. Из рисунка видно, что $\Delta\vec{v} = \vec{CL} + \vec{LD}$, причем вектор $\vec{CL}$ дает изменение скорости по величине $\vec{CL} = \Delta\vec{v}_t$, а вектор $\vec{LD}$ - по направлению $\vec{LD} = \Delta\vec{v}_n$. Тогда $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_t + \Delta\vec{v}_n$. Разделим почленно на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$$

тогда получим, что полное ускорение точки равно:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (10)$$



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

Направление определяется углом α:

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}$$

Самый простой вид неравномерного движения – равноускоренное движение. ***Равноускоренным*** называется движение с постоянным по модулю и направлению ускорением.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = const$$

При равноускоренном движении с начальной скоростью $\vec{v}_0$ ускорение равно:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

где $\vec{v}$ - скорость в момент времени t.

Отсюда скорость равноускоренного движения:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Проекции скорости и ускорения.

Оглавление

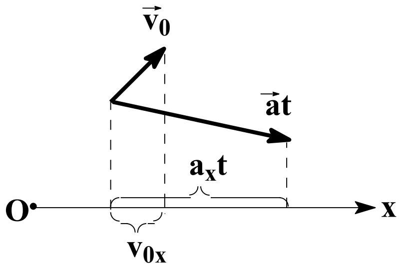
Для выполнения расчетов скоростей и ускорений необходимо переходить от записи уравнений в векторной форме к записи уравнений в алгебраической форме.

Векторы начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{a}$ могут иметь различные направления, поэтому переход от векторной записи уравнений к алгебраической может оказаться весьма трудоемким.

Известно, что проекция суммы двух векторов на какую-либо координатную ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось. Поэтому для нахождения проекции v_x вектора скорости $\vec{v}$ на произвольную ось OX нужно найти алгебраическую сумму проекций векторов $\vec{v}_0$ и $\vec{a}t$ на ту же ось.

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

Проекцию вектора на ось считают положительной, если от проекции начала к проекции конца вектора нужно идти по направлению оси, и отрицательной в противоположном случае.



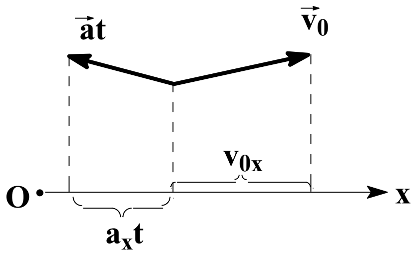
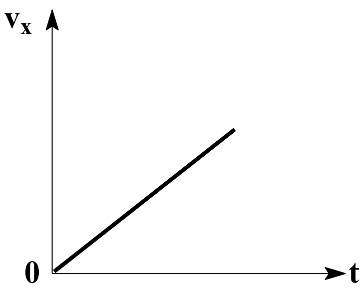
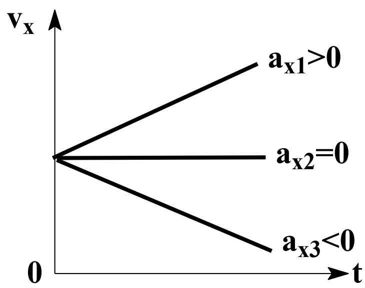


График скорости.

Оглавление

Из уравнения $\mathbf{v_x = v_{0x} + a_x t}$ следует, что графиком зависимости проекции скорости равноускоренного движения от времени является прямая. Если проекция начальной скорости на ось ОХ равна нулю, то прямая проходит через начало координат.





Вращательное движение твердого тела.

Оглавление

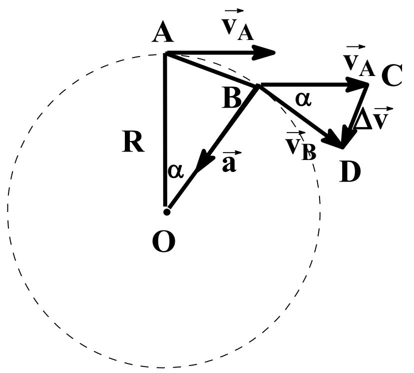
Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси – движение, при котором все точки твердого тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой ***осью вращения.***

Равномерное движение по окружности.

Оглавление

Рассмотрим наиболее простой вид вращательного движения, и уделим особое внимание центростремительному ускорению.

При равномерном движении по окружности значение скорости остается постоянным, а направление вектора скорости $\vec{\mathbf{v}}$ изменяется в процессе движения.



За интервал времени Δt тело проходит путь $\Delta S = v \cdot \Delta t$. Этот путь равен длине дуги **AB.** Векторы скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ в точках **A** и **B** направлены по касательным к окружности в этих точках, а угол α между векторами $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ равен углу между радиусами **OA** и **OB.** Найдем разность векторов $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ и определим отношение изменения скорости к Δt:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Из подобия треугольников OAB и BCD следует

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|CD|}.$$

Если интервал времени Δt мал, то мал и угол α. При малых значениях угла α длина хорды AB примерно равна длине дуги AB, т.е. $|AB| \approx v \cdot \Delta t$. Т.к. $|OA| = R$, $|CD| = \Delta v$,
то получаем

$$\frac{R}{v\Delta t} = \frac{v}{\Delta v},$$

$$\Delta v = \frac{v^2 \Delta t}{R}.$$

Поскольку $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, то получаем

$$a = \frac{v_2}{R}$$

Период и частота.

Оглавление

Промежуток времени, за который тело совершает полный оборот при движении по окружности, называется ***периодам обращения*** (**T**). Т.к. длина окружности равна **2πR**, период обращения при равномерном движении тела со скоростью v по окружности радиусом **R** равняется:

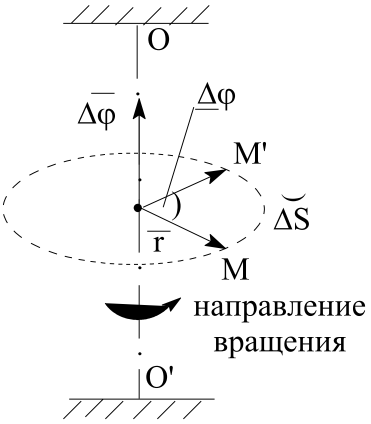
$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

Величина, обратная периоду обращения, называется ***частотой.*** Частота показывает, сколько оборотов по окружности совершает тело в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} \quad (c^{-1})$$

Кинематика вращательного движения.

Оглавление



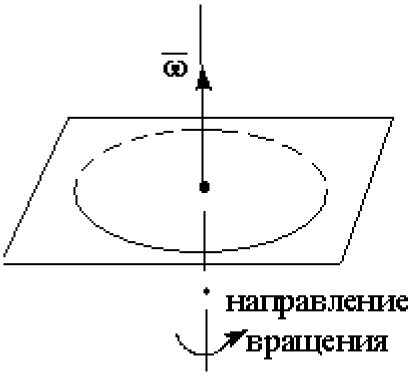
При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси **OO'** точка **M** этого тела с радиус-вектором $\vec{r}$ за время Δt пройдет путь равный длине дуги ΔS, а радиус вектор $\vec{r}$ повернется на угол $\Delta\varphi$. Величина $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta S}{r}$ называется ***углом поворота*** радиус-вектора выбранной точки от некоторого начального положения или модулем углового перемещения.

Для указания направления вращения малым углам поворота приписывают направление: $\Delta\varphi$ направлен по оси вращения так, чтобы рассматриваемое с его конца вращение происходило против часовой стрелки (правило правого винта). Если тело сделало **N** поворотов: $\Delta\varphi = 2\pi N$.
Средняя угловая скорость:

$$\langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \tag{11}$$

Мгновенная угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \tag{12}$$



Направление $\vec{\omega}$ связано с углом поворота правилом правого винта. Размерность – рад/с.
Если тело делает n оборотов в сек, то его угловая скорость $\omega = 2\pi n$.
Связь линейной и угловой скоростей:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{S}{r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dS}{dt}$$

Или

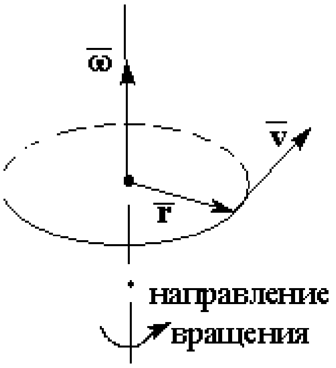
$$v = \omega\cdot r; \tag{13}$$

в векторной форме: $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ (14)

Угловое ускорение вращающегося тела.

Оглавление

Отношение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ называется средним угловым ускорением.



Угловое ускорение в заданный момент времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (15)$$

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен по оси вращения, причем при ускоренном вращении $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$, при замедленном вращении $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$.

Связь углового и линейного ускорений.

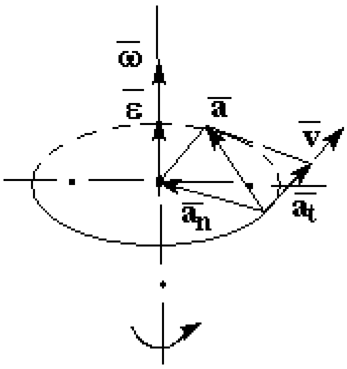
Оглавление

Продифференцируем (14) по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times \mathbf{v} \qquad (16)$$

Первое слагаемое – тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$, т.к. вектор $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ по правилу векторного произведения направлен по касательной к траектории и по модулю равен:

$$a_\tau = \varepsilon\cdot r = \frac{d\omega}{dt}\cdot r = \frac{d}{dt}\left(\omega\cdot r\right) = \frac{dv}{dt}$$



Второе слагаемое – нормальное ускорение, т.к. вектор $\vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{v}$ направлен по радиусу вращения к центру и по модулю равен $a_n = \omega\cdot v = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r$.

Полное ускорение при вращательном движении: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, а его модуль:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2}$$

При равноускоренном вращательном движении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R,$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon,$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{t_1}^{t_2} \omega R dt = R\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\varphi}{dt} dt = R\varphi.$$

1. **$a_n = 0$, $a_\tau = 0$** – прямолинейное равномерное движение;
2. **$a_n = 0$, $a_\tau = const$** – прямолинейное равнопеременное движение;
3. **$a_n = 0$, $a_\tau \neq 0$ –** прямолинейное с переменным ускорением;
4. **$a_n = const$, $a_\tau = 0$ –** равномерное по окружности
5. **$a_n = const$, $a_\tau = const$** – равнопеременное по окружности
6. **$a_n \neq const$, $a_\tau \neq const$** – криволинейное с переменным ускорением.

Основные уравнения кинематики.

Оглавление

Поступательное движение	Вращательное движение
Равномерное	
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
$v = const$	$\omega = const$
$S = S_0 + vt$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$
	$\omega = 2\pi n; \quad \varphi = 2\pi N$
Равнопеременное	
$a = const$	$\varepsilon = const$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$	$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2}$
Неравномерное	
$v \neq const; \quad a \neq const$	$\omega \neq const; \quad \varepsilon \neq const$
$v = \frac{dS}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Связь линейных и угловых параметров	
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$
$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$	$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2}$

Оглавление